

Journées Jeunes EDPistes 2022

Lyon, 23-25 mars 2022

Comité scientifique: Valeria Banica, Karine Beauchard, Franck Boyer, Valentina Busuioc, Matthieu Colin, David Dos Santos Ferreira, Thierry Gallay, Dragoş Iftimie, Sergio Simonella, Benjamin Texier.

Comité d'organisation: Valentina Busuioc, Dragoş Iftimie, Sergio Simonella, Benjamin Texier.

Programme

Mercredi 23 mars

12h20–14h : Déjeuner

14h–15h : Hajer Bahouri

Sur l'équation de Schrödinger non linéaire cubique avec dérivée sur la droite réelle

15h–15h30 : Jin Tan

Well-posedness for Hall-MHD system in critical spaces

15h30–16h : Pause

16h–16h30 : Alessandro Duca

Bilinear controls for non-linear Schrödinger equations

16h30–17h : Felice Iandoli

Dispersion pour les ondes à l'extérieur d'un cylindre

17h–18h : Session posters

Rayan Fahs : On the semi-classical analysis of Schrödinger operators with linear electric potentials in a bounded domain.

Melek Jellouli : Stabilization and control of the BBM equation.

Ngoc Nhi Nguyen : Fermionic semiclassical L^p estimates

Troy Petitt : Well-posedness for large solutions of the porous medium equation in \mathbb{R}^N .

Eugenio Pozzoli : Simultaneous controllability of the bilinear Schrödinger equation on $SO(3)$ with application to the orientational selective transfer of rotational population

Frédéric Valet : On the lack of complete integrability of the Zakharov-Kuznetsov equation

Jeudi 24 mars

9h–10h : Matthieu Hillairet

Paradoxe de Stokes et conséquences

10h–10h30 : József J. Kolumbán

A new approach to the Rayleigh-Taylor instability

10h30–10h50 : Pause

10h50–11h20 : Antonio J. Fernández

Desingularization of vortices for the generalized SQG equations

11h20–11h50 : Geoffrey Beck

Interactions vagues - structures flottantes dans le régime de Boussinesq

11h50–12h20 : Lars Eric Hientzsch

The asymptotic lake equations for vanishing or emerging islands

12h20–14h : Déjeuner

14h–15h : Alain Joye

Adiabatic Lindbladian Evolution with Small Dissipators

15h–15h30 : Nicolas Besset

Low frequency resonances of the charged Klein-Gordon equation in the De Sitter-Reissner-Nordström spacetime.

15h30–16h : Pause

16h–16h30 : Cyril Letrouit

Nodal domains of eigenfunctions of sub-Laplacians

11h50–12h20 : Paul Dario

Homogénéisation et régularité pour les dynamiques de Langevin sur les champs de gradient.

17h–17h30 : Ludovic Godard-Cadillac

Existence of solutions for a bi-species kinetic model of a cylindrical Langmuir probe

19h45–22h : Dîner de la conférence

Vendredi 25 mars

9h–10h : Petru Mironescu

Sobolev maps to manifolds

10h–10h30 : Dinh-Thi Nguyen

Thomas-Fermi profile of a fast rotating Bose-Einstein condensate

10h30–10h50 : Pause

10h50–11h20 : Louise Gassot

Limite sans dispersion pour l'équation de Benjamin-Ono sur le tore

11h20–12h20 : Filippo Santambrogio

A propos du schéma JKO pour l'équation de Fokker-Planck

12h20–14h : Déjeuner

Résumés – Communications orales

Hajer Bahouri – *Sorbonne Université*

Sur l'équation de Schrödinger non linéaire cubique avec dérivée sur la droite réelle

Dans ce travail en collaboration avec Galina Perelman, on s'est intéressé à la question d'existence globale pour l'équation de Schrödinger non linéaire cubique avec dérivée sur la droite réelle. Cette équation dite (DNLS) a apparue dans les années 80 dans l'étude des régimes asymptotiques de la propagation des ondes d'Alfvén dans des plasmas magnétisés. La question d'existence locale pour cette équation est bien comprise dans l'échelle des espaces de Sobolev. Par contre, la question d'existence globale n'est toujours pas complètement réglée. En comparaison avec d'autres équations intégrables comme l'équation de Schrödinger non linéaire cubique (NLS), elle présente un défaut de coercivité et de nouvelles idées étaient nécessaires pour montrer que les solutions étaient globales. Dans ce travail, en alliant les techniques de décomposition en profils avec la structure intégrable de l'équation, on a pu établir un résultat d'existence global pour (DNLS) dans H^s , $s \geq 1/2$.

Geoffrey Beck – *ENS Paris*

Interactions vagues - structures flottantes dans le régime de Boussinesq

Avec D. Lannes (IMB) et L. Weynans (INRIA-IMB), nous nous sommes intéressés à la production du courant via l'énergie houlomotrice en considérant un solide rigide partiellement immergé capable de se mouvoir verticalement à la surface de l'eau. Le système est couplé, car la surface d'eau est contrainte à épouser le fond de l'objet flottant et le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte, la pression de l'eau sous l'objet, agit comme une force qui pousse l'objet à rester immergé. Nous avons choisi de modéliser la dynamique des vagues par le système de Boussinesq-Abott car il correspond à une perturbation dispersive des équations en eaux peu profondes de Saint-Venant. Plus la structure flottante sera loin du littoral, plus la dispersion sera élevée. Une dispersion faible mais non-nulle régularise la solution en créant une couche limite dispersive qui permet de s'affranchir des conditions de comptabilité usuelles aux systèmes hyperboliques pour établir le caractère bien posé en temps court (à l'opposé justement de Saint-Venant). Pour établir ce caractère bien posé et expliciter des raisons pouvant mener à l'explosion en temps fini, nous avons réécrit ce système fluide-structure comme un problème de transmission entre la partie à gauche et la partie à droite de l'objet flottant où les conditions de transmission dépendent de la dynamique du solide. L'existence en temps long n'est, hélas, pas encore démontrée. Une première étape a été franchie en écrivant une estimée d'énergie uniforme par rapport aux paramètres de non-linéarité et de dispersion mais conditionnée au fait que la norme $W^{1,\infty}$ de la surface d'eau soit uniformément bornée. Pour obtenir la borne uniforme souhaitée, il est classique d'obtenir d'abord un contrôle sur les dérivées temporelles et ensuite avec des arguments d'ellipticité de contrôler les dérivées en espace-temps et enfin de conclure avec les injections de Sobolev. Le contrôle des dérivées temporelles nécessite une étude fine du linéarisé autour de la solution exacte. Hélas, cette étude fine ne nous a permis d'obtenir une borne uniforme que pour un ordre de temps plus court que celui espéré. Il s'agit ici que d'une limitation technique liée aux conditions de contact entre le solide et le fluide. Les simulations numériques s'appuient sur une formulation augmentée qui ajoute les traces de l'élévation des vagues aux points de contacts ainsi que leurs dérivées comme inconnues. Il est alors possible d'écrire notre problème de transmission sous la forme d'une loi de conservation avec flux non-local. Nous avons adapté des schémas volumes finis de type Lax-Friedrichs (ordre 1) et Mac-Cormack (ordre 2) à notre loi de conservation avec flux non-local (avec bien entendu un couplage avec un schéma d'intégration en temps pour la partie EDO). Nous avons comparé nos simulations aux solutions analytiques disponibles dans le régime linéaire. Pour simplifier, nous ne

présenterons que le cas du retour à l'équilibre, c'est-à-dire à la situation où initialement le fluide est au repos et le solide est lâché hors de sa position d'équilibre, même si la démarche se généralise sans difficultés mathématiques (seulement calculatoires) à des cas plus généraux.

Nicolas Besset – *Université Paris Saclay*

Low frequency resonances of the charged Klein-Gordon equation in the De Sitter-Reissner-Nordström spacetime.

Resonances are complex frequencies which describe the oscillation and damping of solutions to wave-type equations at large time scales. In black hole type spacetimes such as the De Sitter-Reissner-Nordström (DSRN) solution of Einstein-Maxwell equations, we can define resonances for characteristic wave-type operators thanks to the analytic Fredholm theory. We construct in this talk boundary parametrices for the spectral family associated to the charged Klein-Gordon equation in the DSRN spacetime and deduce the index 0 Fredholm property used to define resonances. We then discuss the localization of low frequency resonances depending on the product of the charges of the black hole and the Klein-Gordon field, its mass or its angular momentum.

Paul Dario – *Université Lyon 1*

Homogénéisation et régularité pour les dynamiques de Langevin sur les champs de gradient.

Les dynamiques de Langevin pour les champs de gradient sont des modèles importants en physique statistique en raison de leurs relations avec les modèles de surfaces aléatoires. Il est en particulier intéressant de comprendre leur comportement à grande échelle, et dans cette direction, un certain nombre de résultats ont été établis au cours des 20 dernières années (notamment la limite hydrodynamique de Funaki-Spohn et la limite d'échelle de Naddaf-Spencer et Giacomin-Olla-Spohn). Dans cet exposé, nous présenterons le modèle, ces motivations et principaux résultats. Nous étudierons une récente connexion avec l'homogénéisation stochastique d'équations non-linéaires, discuterons certains nouveaux résultats qui se déduisent de cette approche ainsi que quelques questions ouvertes. L'exposé sera basé sur un travail en collaboration avec S. Armstrong.

Alessandro Duca – *Université Paris Saclay - Versailles*

Bilinear controls for non-linear Schrödinger equations

We consider the nonlinear Schrödinger equation (NLS) in the presence of an external potential field whose time-dependent amplitude plays the role of control.

In the first part of the talk, we assume the NLS equation on a torus of arbitrary dimension and we ensure the approximate controllability between any pair of eigenstates with respect to the L^2 -norm. The result is valid in arbitrarily small time and when the potential satisfies a specific saturation property. The proof is obtained by a multiplicative version of a geometric control approach introduced by Agrachev and Sarychev.

In the second part, we consider the NLS equation on an interval and in the presence of Dirichlet type boundary conditions. We ensure the local exact controllability with respect to the H^3 -norm. We use a bilinear control that acts on the equation through four directions: three Fourier modes and a generic one. The Fourier modes are chosen so that they satisfy the saturation property introduced in the first part of the talk. These modes approximately control the linearised equation. The generic direction instead allows to prove its exact controllability. The inverse function theorem finally yields the local exact controllability of the NLS equation.

This is joint work with Vahagn Nersisyan.

Antonio J. Fernández – *Instituto de Ciencias Matemáticas Madrid*

Desingularization of vortices for the generalized SQG equations

We consider the generalized inviscid surface-quasigeostrophic equations (gSQG) and analyse the existence of a smooth compactly supported solution to the (gSQG) which is concentrated around N moving vortices. The result we discuss could be understood as the extension to the case of the (gSQG) of the seminal result of Marchioro and Pulvirenti concerning the bi-dimensional incompressible Euler equations. However, the information about the dynamic behaviour and the shape of the constructed solution that we obtain is much more precise than the obtained by Marchioro and Pulvirenti. The talk is based on a joint work with Manuel del Pino.

Louise Gassot – *Brown University*

Limite sans dispersion pour l'équation de Benjamin-Ono sur le tore

On s'intéresse à la limite sans dispersion pour l'équation de Benjamin-Ono sur le tore, lorsque la donnée initiale a la forme d'une bosse. On montre qu'il existe une suite de données initiales approchées pour lesquelles les solutions correspondantes admettent une limite faible lorsque le paramètre de dispersion tend vers zéro. La limite faible s'exprime en fonction de la solution multivaluée de l'équation de Burgers obtenue par la méthode des caractéristiques. La méthode se base sur les coordonnées de Birkhoff pour l'équation de Benjamin-Ono construites par Gérard, Kappeler et Topalov.

Ludovic Godard-Cadillac – *Université de Nantes*

Existence of solutions for a bi-species kinetic model of a cylindrical Langmuir probe

In this work, we study a collisionless kinetic model for plasmas in the neighborhood of a cylindrical metallic Langmuir probe. This model consists in a bi-species Vlasov-Poisson equation in a domain contained between two cylinders with prescribed boundary conditions. The interior cylinder models the probe while the exterior cylinder models the interaction with the plasma core. We prove the existence of a weak-strong solution for this model in the sense that we get a weak solution for the 2 Vlasov equations and a strong solution for the Poisson equation. The first parts of the talk are devoted to explain the model and proceed to a detailed study of the Vlasov equations. This study leads to a reformulation of the Poisson equation as a 1D non-linear and non-local equation and we prove it admits a strong solution using an iterative fixed-point procedure. Joint work with Mehdi Badsı (Nantes).

Lars Eric Hientzsch – *Universität Bielefeld*

The asymptotic lake equations for vanishing or emerging islands

The lake equations arise as a 2D shallow water model describing the evolution of the vertically-averaged horizontal component of the 3D velocity field. A lake is characterized by the geometry of its surface and its depth function. The equations are degenerate if vanishing topographies are included in the description.

Motivated by physical phenomena such as flooding, sedimentation and seismic activity, we investigate the stability of these equations under changes of both the geometry and the topography. More precisely, we consider different scenarios leading to the appearance of a degenerate island, consisting of one point and zero depth, for which the lake equations become singular. In the singular limit of an island collapsing to a point we prove that the asymptotic lake equations include an additional point vortex. Second, we discuss the scenario of an emergent island.

We highlight differences and analogies to the small obstacle problem for the 2D incompressible Euler equations (lake equations with flat topography). New uniform estimates in weighted spaces are introduced that enable us to prove the compactness result.

This is joint work with Christophe Lacave and Evelyne Miot (Université Grenoble Alpes).

Matthieu Hillairet – *Université de Montpellier*

Paradoxe de Stokes et conséquences

Les équations de Stokes stationnaires sont un modèle classique pour décrire l'écoulement d'un fluide incompressible à densité constante infiniment visqueux. Le paradoxe de Stokes stipule qu'il n'existe pas de solution à ce problème — à l'extérieur d'un disque en dimension 2 — qui tende vers 0 à l'infini quand on impose une condition au bord constante sur le disque. En particulier si on considère que le disque est la tranche d'un cylindre, on obtient qu'un cylindre ne peut tomber avec une vitesse constante. L'interprétation proposée par Stokes est que l'hypothèse d'un écoulement stationnaire est contradictoire.

Ce paradoxe induit plusieurs difficultés dans le traitement des problèmes d'interaction fluide-solide en dimension 2. Dans mon exposé, je discuterai deux directions particulières : extension aux équations de Navier-Stokes stationnaires du paradoxe de Stokes, analyse d'un problème instationnaire décrivant les interactions d'un fluide visqueux avec un disque.

Felice Iandoli – *Sorbonne Université*

Dispersion pour les ondes à l'extérieur d'un cylindre

Dans ce séminaire je présenterai un travail en collaboration avec Oana Ivanovici. Nous considérons l'équation des ondes à l'extérieur d'un cylindre en dimension trois, nous construisons une paramétrice globale et nous en déduisons des estimations dispersives optimales pour les solutions.

Alain Joye – *Université Grenoble Alpes*

Adiabatic Lindbladian Evolution with Small Dissipators

We consider a time-dependent small quantum system weakly coupled to an environment, whose effective dynamics we address by means of a Lindblad equation. We assume the Hamiltonian part of the Lindbladian is slowly varying in time and the dissipator part has small amplitude. We study the properties of the evolved state of the small system as the adiabatic parameter and coupling constant both go to zero, in various asymptotic regimes.

József J. Kolumbán – *Universität Leipzig*

A new approach to the Rayleigh-Taylor instability

In this talk we consider the inhomogeneous incompressible Euler equations describing two fluids with different constant densities under the influence of gravity as a differential inclusion. By considering the relaxation of the constitutive laws we formulate a general criterion for the existence of infinitely many weak solutions which reflect the turbulent mixing of the two fluids. Our criterion can be verified in the case that initially the fluids are at rest and separated by a flat interface with the heavier one being above the lighter one - the classical configuration giving rise to the Rayleigh-Taylor instability. We construct specific examples when the Atwood number is in the ultra high range, for which the zone in which the mixing occurs grows quadratically in time.

Cyril Letrouit – *ENS Paris*

Nodal domains of eigenfunctions of sub-Laplacians

In this talk, I will present two results concerning the nodal sets of eigenfunctions of sub-Laplacians. The first one asserts the validity in this hypoelliptic setting of Courant's theorem on the number of nodal domains of eigenfunctions. The second one is the $C/\sqrt{\lambda}$ density, with respect to the sub-Riemannian distance, of the nodal sets of eigenfunctions with eigenvalue λ .

Petru Mironescu – *Université Lyon 1*

Sobolev maps to manifolds

Sobolev spaces $W^{s,p}$ of maps with values into a compact manifold naturally appear in geometry and material sciences. They exhibit qualitatively different properties from scalar Sobolev spaces: in general, there is no density of smooth maps, and standard trace and lifting theory fail. We will review some of their basic properties, with focus on the case where $s < 1$, in which harmonic analysis tools combined with geometric considerations are quite effective. In particular, we discuss the factorization of unimodular maps, which can be seen as a geometric version of paraproducts.

Dinh-Thi Nguyen – *ENS Lyon*

Thomas-Fermi profile of a fast rotating Bose-Einstein condensate

We study the minimizers of a magnetic 2D non-linear Schrödinger energy functional in a quadratic trapping potential, describing a rotating Bose-Einstein condensate. We derive an effective Thomas-Fermi-like model in the rapidly rotating limit where the centrifugal force compensates the confinement, and available states are restricted to the lowest Landau level. The coupling constant of the effective Thomas-Fermi functional is linked to the emergence of vortex lattices (the Abrikosov problem). We define it via a low density expansion of the energy of the corresponding homogeneous gas in the thermodynamic limit.

Filippo Santambrogio – *Université Lyon 1*

A propos du schéma JKO pour l'équation de Fokker-Planck

Une des premières applications de la distance de Wasserstein issue du transport optimal était l'interprétation variationnelle de certaines EDP de diffusion en tant que flot de gradient. Cela a commencé grâce aux travaux de Jordan-Kinderlehrer-Otto sur l'équation de Fokker-Planck linéaire et le schéma discrétisé en temps qui en découle, correspondant à un schéma d'Euler implicite, est maintenant appelé schéma JKO. Après une courte introduction aux flots de gradient et aux outils de transport optimal dont on aura besoin, je montrerai comment certaines inégalités bien connues sur les solutions de Fokker-Planck ont leur équivalent dans le monde discret du schéma JKO, et je montrerai deux applications : d'abord, une preuve de l'inégalité de Sobolev logarithmique "à la Bakry-Emery" mais discrétisée en temps, puis l'amélioration de la convergence des solutions JKO vers la solution de l'EDP, jusqu'à obtenir la convergence forte L^2 des dérivées secondes.

Jin Tan – *Cergy Paris Université*

Well-posedness for Hall-MHD system in critical spaces

In this talk, I will introduce our recent results on the well-posedness of the incompressible Hall-magnetohydrodynamic system (Hall-MHD) in critical spaces. Our first result concerned with constant density case, we provide an elementary proof of a small data global existence with critical

Sobolev regularity, in the spirit of the Fujita-Kato theorem for the Navier- Stokes equations. For Hall-MHD system with variable density, assuming that the initial density is a small perturbation of a positive constant in the L^∞ norm, we show a global well-posedness result for small initial velocity and magnetic fields with critical Besov regularity. Our proofs strongly rely on some new reformulations of the system.

Résumés – Posters

Rayan Fahs – *Université d'Angers*

On the semi-classical analysis of Schrödinger operators with linear electric potentials in a bounded domain.

We consider the Laplace operator, with a strong constant electric field and Dirichlet boundary conditions on a smooth bounded domain of \mathbb{R}^N . This work aims at generalizing the recent results by Cornean, Krejčířík, Pedersen, Raymond, and Stockmeyer in dimension 2. More precisely, in dimension N , in the strong electric field limit, we derive, under certain local convexity conditions, a full asymptotic expansion of the low-lying eigenvalues. To establish our main result, we perform the construction of quasi-modes that will make it possible to obtain the upper bounds for the eigenvalues. The "optimality" of our constructions is then established thanks to reduction to model operators and localization estimates.

Melek Jellouli – *Université de Sousse & Université Paris Saclay*

Stabilization and control of the BBM equation.

We are interested in the stabilization and control of the nonlinear BBM equation on the torus. In the stabilization part, we start first by considering the nonlinear KdV-BBM equation with a compact support damping. We show the global existence of the solution, as well as its convergence in time towards an analytical function using a result of Hale and Raugel. This analyticity property allows the application of unique continuation results Tataru to show that the limit function is a constant. Then we give a deduction that the approach we made on KdV-BBM is applicable for the equation of BBM in a particular case. More precisely we say that the unique continuation conjecture that Rosier has stated in his paper (On the Benjamin-Bona-Mahony equation with a localized damping - 2016) is true with a damping which depends on time. The first part is therefore a stabilization result through a damping located in space. The control part is through control terms localized in frequencies. We use controls taking values in a finite dimensional space to show that the nonlinear BBM equation is approximately controllable in $H^1(T)$, and is not exactly controllable in $H^s(T)$ for $s \in [1, 2[$.

Ngoc Nhi Nguyen – *Université Paris-Saclay*

Fermionic semiclassical L^p estimates

Spectral properties of Schrödinger operators are studied a lot in mathematical physics. They can give the description of trapped fermionic particles. Researches on the spatial concentration of semiclassical Schrödinger operators' eigenfunctions are still carried out. Actually, there are very precise results in special cases like the harmonic oscillator. However, it is not always possible to obtain explicitly point wise information for more general potentials. One can measure the concentration by estimating these functions with L^p bounds. In this poster, I will consider the one-body case and in the many-body one without interactions.

Troy Petitt – *Politecnico di Milano*

Well-posedness for large solutions of the porous medium equation in \mathbb{R}^N .

I present the "large data problem" for diffusion equations in \mathbb{R}^N - that is, how large can the initial data $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ be while still guaranteeing local-in-time existence and uniqueness of solutions. Attention is drawn to the role of explicit *source solutions* and the comparison between behavior of solutions to the linear heat equation and nonlinear porous medium type equations. For these large initial data and nonlinear problems, L^1 theory and/or convolution with a source

solution do not suffice. I explain the method of Bénilan, Crandall, and Pierre to prove existence and uniqueness for the optimal class of initial data of the *porous medium equation*, and the method of Kamin and Ughi to find asymptotics for a subset of the optimal class. Finally, I explain how these methods were adapted in a series of joint papers with Matteo Muratori and Fernando Quirós for the *weighted porous medium equation*.

Eugenio Pozzoli – *Université Bourgogne Franche-Comté*

Simultaneous controllability of the bilinear Schroedinger equation on $SO(3)$ with application to the orientational selective transfer of rotational population

We consider the bilinear Schroedinger equation on the Lie group of rotation $SO(3)$ or on the two-dimensional sphere S^2 . The evolution of this partial differential equation is interpreted as the rotation of a quantum rigid body, that is, a rotating molecule. For simplicity, we focus on symmetric or linear molecules, but the study could be extended to asymmetric bodies too. The rotation is controlled in dipole approximation via an electric field (which is supposed to be a piecewise constant, or locally integrable, or analytic control function) pointing in the z-direction. One of the main features of this system is that the drift Hamiltonian exhibits severe degeneracies increasing at every eigenvalue, usually called orientational degeneracies. By introducing an abstract controllability test, we classify its simultaneous approximate controllability, that is, the capability of controlling (approximately) an arbitrary large amount of decoupled infinite-dimensional dynamics (each one corresponding to different orientational quantum numbers) with a single control function. The approach is constructive, meaning that it gives explicit control laws to drive the state transfer despite the existence of arbitrarily large amounts of degenerate (i.e., resonant) transitions. The idea is to consider a part of the interaction Hamiltonian as a perturbation of the drift, and the control law is obtained as a linear combination of periodic functions that oscillate in resonance with the spectral gaps of the perturbed drift. We also illustrate this fact with a numerical simulation of an orientational selective transition: the transfer is performed in a finite-dimensional modal truncation of the system, but it is guaranteed approximately also in the infinite-dimensional original system (with the same control function) thanks to an explicit estimate of the error. This is a joint work with Thomas Chambrion.

Frédéric Valet – *Université de Bergen*

On the lack of complete integrability of the Zakharov-Kuznetsov equation

The Zakharov-Kuznetsov equation (ZK) in $3d$ is a dispersive equation which models the evolution of ionic acoustic waves in a cold and magnetized plasma. Although ZK has a physical meaning, the lack of complete integrability thwarts the use of conserved quantities with any number of derivatives. On the other side, the balance between the dispersive part and the nonlinearity of ZK provides the existence of waves moving in one direction with constant velocity and keeping their form along the time, the solitons. This poster introduces the existence and uniqueness of solutions R^* , called multi-solitons, which in large time behave like a sum R_K of K decoupled solitons. The uniqueness of those objects involves the control of the H^s -norm, for s large enough, of the difference between R_K and R^* . To circumvent the absence of conserved quantities, we use modified quantities related to the H^s -norm. The control of these quantities is specific to the dispersive properties of ZK and enables the proof of the uniqueness of the multi-solitons. Even though those quantities are necessary in this context, it leaves open the questions solved by complete integrability techniques, like the conjecture of decomposition into solitons plus a radiative term.